مکانیک آماری کوانتومی_ بخش چهارم: گاز بوزونی در دمای دلخواه

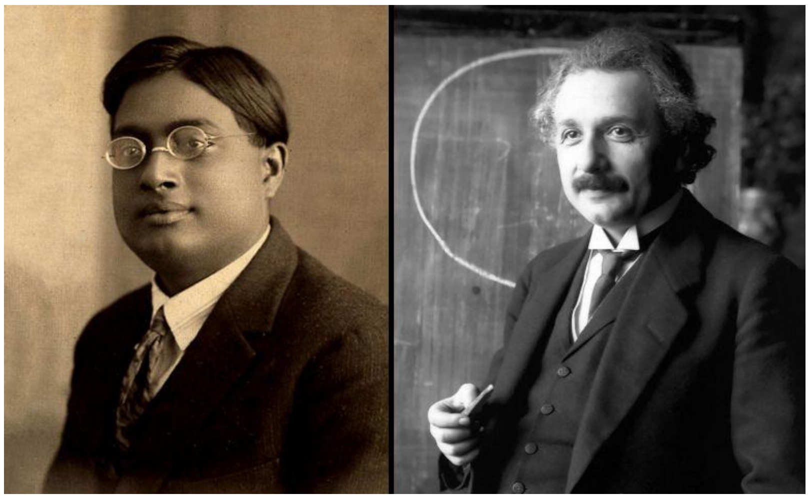
وحید کریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۸ اردیبهشت ۱۴۰۳

۱ مقدمه

ساتیاندرا بوز، که هرگز مدرک دکتری نگرفت، ریاضی فیزیکدان هندی بود که علایق وسیعی در رشته های دیگری چون کانی شناسی، شیمی، بیولوژی، هنر، ادبیات و موسیقی داشت. وی به مقام عضویت در انجمن پادشاهی انگلستان نیز رسید و عضو چندین انجمن پژوهشی در هند پس از استقلال بود. وی همچنین با چندین زبان از جمله انگلیسی، فرانسه، آلمانی و سانسکریت آشنایی کامل داشت. مقاله اولیه بوز در سال ۱۹۲۴ یعنی ۲۴ سال بعد از کار پلانک نوشته شده و اثبات قانون پلانک برای تابش جسم سیاه به شیوه جدید است. این شیوه جدید چیزی نیست جز شمارش حالت های فوتون ها به عنوان ذرات یکسان به روش صحیحی که در درسهای گذشته دیده ایم. سهم اینشتین این بود که اهمیت کار بوز را به عنوان سرآغاز مکانیک آماری کوانتومی فهمید، کار او را به ذرات جرم دار تعمیم داد و توانست پدیده مهمی را پیش بینی کند که امروزه آن را چگالش بوز_اینشتین [۱] می نامیم. بوز در ۱۹۲۴ مقاله خود را برای اینشتین فرستاد و از او خواست که اگر آن را حاوی نتیجه ای در خود می داند، ترجمه ای از آن را برای مجله مهم آن دوران یعنی Zeitschsrift fur Phyzik بفرستد. قسمتی از متن نامه بوز به اینشتین چنین است:

«... اگر فکر می کنید که مقاله خوبی است، ممنون خواهم شد اگر ترتیب انتشارش را در مجله Zeitschsrift fur Phyzik بدهید. اگرچه برای شما فردی کاملا غریبه هستم، ولی در تقاضایی اینچنینی تردیدی به خود راه نمی دهم، چرا که ما همه شاگرد شما هستیم و از نوشته های شما آموخته ایم. نمی دانم آیا شما هنوز به یاد می آورید که کسی از شهر کلکته برای ترجمه مقالات تان در نسبیت از شما اجازه گرفت



Satyendra Nath Bose (1894-1974) Albert Einstein (1879-1955)

شکل ۱: ساتی یاندرا بوز و آلبرت آینشتین، دو فیزیکدانی که نخستین بار مکانیک آماری بوزون ها را تدوین کردند.

و شما نیز موافقت کردید. آن کتاب اکنون چاپ شده و من کسی بودم که کتاب شما را در نسبیت عام ترجمه کردم. »

Bose-Einstein Condensation[1]

در درس گذشته با استفاده از آن روابط گاز فرمیونی ایده آل را بررسی کردیم. در این درس گاز بوزونی ایده آل را مطالعه می کنیم. برای بوزون ها نیز خواهیم دید که خاصیت کوانتومی آنها منجر به پدیده های عمیق و شگفت انگیز ماکروسکوپی خواهد شد. مهم ترین این پدیده ها چگالش بوزـ اینشتین [۱] است که طی آن کسر قابل توجهی از کل ذرات یعنی تعداد ماکروسکوپی از ذرات در حالت پایه جمع یا به اصطلاح چگالیده می شوند. این پدیده در دماهای بسیار کم یا چگالی های بسیار زیاد آنهم فقط برای بوزون ها رخ می دهد و منشاء پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابررسانایی است. از نظر کیفی، به صورت خیلی ابتدایی می توان این پدیده را به این شکل توضیح داد که قبل از چگالش پخش شدن ذرات در تراز های مختلف که هرکدام تکانه و انرژی مخصوص به خود دارند باعث برخوردها و پراکندگی ذرات از یک دیگر و در نتیجه باعث بروز مزاحمت و ویسکوزیته در مایعات و یا مقاومت الکتریکی در رساناهای معمولی می شود. ولی بعد از چگالش، جمع شدن انبوهی از ذرات در یک حالت پایه با انرژی و تکانه معین باعث رفتار جمعی و یکسان ذرات و در نتیجه از بین رفتن ویسکوزیته در مایعات یا مقاومت الکتریکی در ابررساناها می شود.

[۱] Bose-Einstein Condensation

باید دقت کرد که در یک ابررسانا، الکترون ها دو به دو تشکیل جفت هایی موسوم به جفت های کوپر [۲] می دهند و این جفت های کوپر هستند که نهایتاً چگالیده شده و باعث ابررسانایی می شوند. به طور کیفی می توان گفت که رفتار انبوهه ذرات قبل از چگالش مثل یک گاز و بعد از چگالش مثل یک مایع است. این تفاوت در تمام کیفیات این دستگاه بس ذره ای نظیر تراکم پذیری، ظرفیت گرمایی ویژه و نظایر آن دیده می شود.

بعد از این مقدمه می توانیم به بررسی دقیق مکانیک آماری گاز بوزونی ایده آل بپردازیم. از درس های قبلی روابط کلی را یادآوری می کنیم. داریم:

$$\ln Q = -\sum_i \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \tag{۱}$$

$$N = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \tag{۲}$$

$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \tag{۳}$$

برای گاز ایده آل، ϵ_i ها عبارتند از سطوح انرژی یک ذره درون یک چاه پتانسیل که ابعاد آن را L می گیریم. هرگاه حجمی را که ذره در آن قرار دارد یک مکعب d بعدی بگیریم و شرایط مرزی را نیز طوری بگیریم که تابع موج روی دیواره ها صفر باشد ، خواهیم داشت:

$$\epsilon_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}(n_1^2 + n_2^2 + \cdots n_d^2). \tag{۴}$$

در درس قبلی دیدیم که چگونه با داشتن این انرژی می توان جمع های بالا را به انتگرال تبدیل کرد. با استفاده از تابع چگالی حالت ها بدست می آوریم:

$$\ln Q = -\frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1}\ln(1 - ze^{-x})dx. \tag{۵}$$

اما این رابطه یک اشکال اساسی دارد که اینک آن را توضیح داده و رفع می کنیم. برای راحتی با افزودن یک جمله ثابت به هامیلتونی، کاری می کنیم که انرژی حالت پایه برابر با صفر باشد. این کار هیچ تغییری در خصوصیات فیزیکی این پدیده ایجاد نمی کند. بنابراین قرار می دهیم $\epsilon_0 = 0$ که در اثر آن محدوده پارامتر z این خواهد بود:

$$0 \leq z < 1. \tag{۶}$$

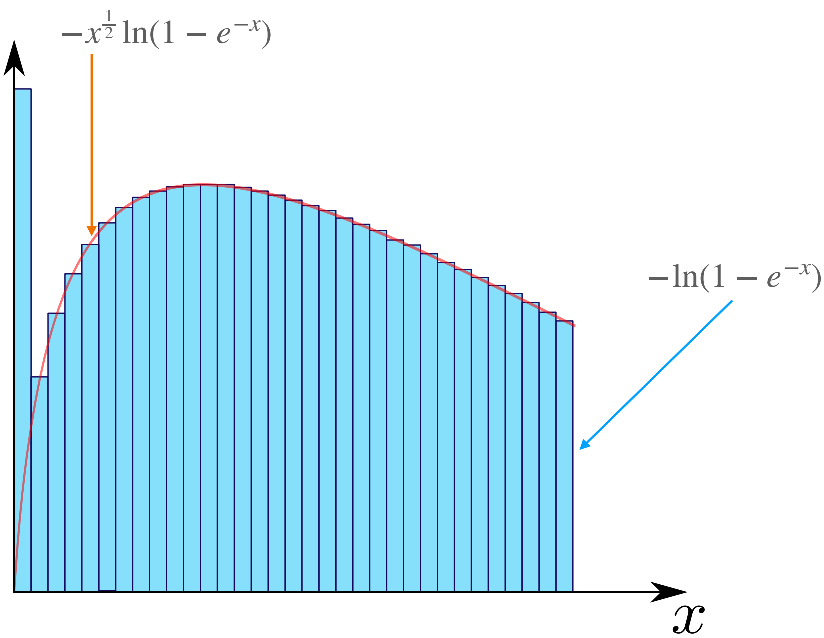
[۲] Cooper Pairs

حال توجه می کنیم که در عبارت (۱) سهم جمله حالت پایه به صورت

$$-\ln(1-ze^{-\beta\epsilon_0}) = -\ln(1-z) \qquad (۷)$$

است. وقتی که z به سمت 1 میل می کند، این جمله به سمت بی نهایت میل می کند. ببینیم آیا این سهم در انتگرال (۱) در نظر گرفته شده است یا خیر؟ اگر به عبارت $x^{\frac{d}{2}-1}$ که در واقع نشان دهنده چگالی حالت ها در واحد انرژی است، نگاه کنیم متوجه می شویم که برای $d > 2$ این چگالی به سمت صفر و در نتیجه جمله $x^{\frac{d}{2}-1}\ln(1-e^{-x})$ نیز به سمت صفر میل می کند و در نتیجه روشن است که عبارت واقعی (۱) با انتگرال (**؟؟**) در این نقطه تفاوت فاحشی دارد. دلیل این امر هم روشن است . اگر به شکل نگاه کنیم ، این تفاوت را می بینیم.

(۲)



شکل ۲: وقتی که $z \longrightarrow 1$ ، در بعدهای بالاتر از $d = 2$ جمع (۲) را نمی توان با انتگرال (۵) جایگزین کرد.

عبارت دقیق مجموع تمام ارتفاعات میله هاست یعنی عبارت (۱) . عبارت (۵) سطح زیر منحنی قرمز رنگ است و سهم حالت پایه را در نظر نگرفته است. دلیل این اشتباه آن است که تبدیل یک جمع به یک انتگرال فقط وقتی صحیح است که جملات متوالیِ جمع نسبت به هم تفاوت شان اندک باش به طوری که بتوان آنها را با یک تابع هموار تقریب زد. در این جا سهم حالت پایه با بقیه حالت ها تفاوت بسیار زیادی دارد.

سوال مهمی که در این جا پیش می آید این است که آیا تنها سهم حالت پایه است که در انتگرال (۵) نادیده گرفته شده یا این که مثلا سهم اولین و دومین و سومین حالت برانگیخته نیز از قلم افتاده است؟ برای پاسخ به این سوال بهتر است که سهم اولین حالت برانگیخته را با سهم حالت پایه مقایسه کنیم. انرژی حالت پایه را با ϵ_0 و انرژی حالت پایه اول را با ϵ_1 نشان می دهیم. روشن است که

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 \approx \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}. \qquad (۸)$$

حال سهم این دو جمله در Q برابر است با:

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) - -\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_1}). \qquad (۹)$$

از درس های قبلی دیده ایم که محدوده مجاز z برابر است با $[0,\ e^{\beta\epsilon_0}]$ یعنی $0 \leq z \leq e^{\beta\epsilon_0}$. بنا بر این بیشترین مقداری که سهم اولین حالت برانگیخته یعنی جمله دوم می تواند اختیار کند برابر است با :

$$-\ln(1 - e^{\beta(\epsilon_0-\epsilon_1)}) \approx -\ln(\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0)) \approx \ln - \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\beta\right). \qquad (۱۰)$$

حتی اگر عدد داخل پرانتز به کوچکی 10^{-100} یا 10^{-200} باشد، باز لگاریتم آن عددی در حدود ۱۰۰ یا ۲۰۰ است و این در حالی است که جمله اول در حد $z \longrightarrow e^{\beta\epsilon_0}$ به سمت بی نهایت میل می کند. بنابر این تصویری که در صفحه قبل نشان داده ایم درس است و تنها سهم حالت پایه است که می بایست جداگانه در نظر گرفته شود. با این استدلال اکنون روشن است که چگونه می بایست روابط ۱ تا ۳ را برای بوزون ها بنویسیم. (برای سادگی و با قرارداد خود، انرژی حالت پایه را برابر با صفر می گیریم). بنابراین روابط ۱ تا ۳ به شکل زیر در می آیند:

$$\ln Q = -\ln(1-z) - \frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1}\ln(1-ze^{-x})dx. \qquad (۱۱)$$

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1}dx}{z^{-1}e^x - 1}. \qquad (۱۲)$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}}dx}{z^{-1}e^x - 1}. \qquad (۱۳)$$

دقت کنید که $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات در حالت پایه است که آن را با N_0 نشان می دهیم:

$$N_0 = \frac{z}{1-z}. \tag{۱۴}$$

این عدد یعنی تعداد ذرات در حالت پایه، با نزدیک شدن z به 1 می تواند بدون هیچ حدی بزرگ شود. البته این جمله سهمی در انرژی یعنی در عبارت (۱۳) ندارد، زیرا انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته ایم. برای ادامه به رابطه زیر توجه می کنیم. می توانیم انتگرال را به صورت جزء به جزء محاسبه کنیم. در نتیجه بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1}\ln(1-ze^{-x})dx &= \frac{1}{\frac{d}{2}}x^{\frac{d}{2}}\ln(1-ze^{-x})\,|_0^\infty \\ &+ \frac{1}{\frac{d}{2}}\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}}\frac{1}{z^{-1}e^x-1}dx.\end{aligned} \tag{۱۵}$$

با توجه به اینکه عبارت اول برابر با صفر است و با تعریفِ تابع زیر

$$g_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x-1}. \tag{۱۶}$$

بدست می آوریم:

$$\boxed{N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d}g_{\frac{d}{2}}(z), \qquad \frac{PV}{kT} = -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d}g_{\frac{d}{2}+1}(z), \qquad \frac{U}{kT} = \frac{d}{2}\frac{V}{\lambda^d}g_{\frac{d}{2}+1}(z).} \tag{۱۷}$$

توابع $g_n(z)$ نیز مثل توابع فرمیونی دارای خاصیت زیر هستند:

$$zg'_n(z) = g_{n-1}(z). \tag{۱۸}$$

اثبات این خاصیت دقیقا مثل اثباتی است که برای فرمیون ها ارائه کردیم. (به ضمیمه درس مربوط به فرمیون ها نگاه کنید.) اگر به تعریف توابع $g_n(z)$ نگاه کنیم می بینیم با توجه به اینکه $0 \le z \le 1$ است، تابع های $g_n(z)$ مثبت هستند. این رابطه هم چنین نشان می دهد که این توابع صعودی هستند. هم چنین از رابطه (۱۶) معلوم است که $g_n(0) = 0$.

- تمرین: نشان دهید که

$$g_n(1) = \zeta(n), \tag{۱۹}$$

که در آن ζ تابع زتای ریمان است یعنی

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots . \qquad (۲۰)$$

می دانیم که $\zeta(1) = \infty$ و $\zeta(\frac{3}{2}) = 2.612$.

اگر به رابطه (۱۷) نگاه کنیم متوجه می شویم که $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات موجود در حالت پایه و $\frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z)$ تعداد ذرات موجود در تمامی حالت های برانگیخته است. این دو را به ترتیب با N_0 و N_e نمایش می دهیم، یعنی

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \equiv N_0 + N_e. \qquad (۲۱)$$

با توجه به خواصی که در مورد تابع $g_n(z)$ گفتیم، (یعنی اینکه این تابع صعودی است و z نیز بین صفر و یک است)، معلوم می شود که ظرفیت حالات برانگیخته برای جا دادن ذرات محدود است. این ظرفیت برابر است با

$$(N_e)_{max} = \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(1) = \frac{V}{\lambda^d} \zeta(\frac{d}{2}). \qquad (۲۲)$$

دقت کنید که این ظرفیت به دما بستگی دارد. حال اگر تعداد کل ذرات موجود در گاز بیش از این مقدار باشد، بقیه ذرات می بایست حتما به حالت پایه بروند. در این حالت می گوییم که ذرات شروع به چگالش در حالت پایه یا به سادگی شروع به چگالش کرده اند. بنابراین شرط چگالش آن است که

$$N \geq \frac{V}{\lambda^d} \zeta(\frac{d}{2}), \qquad (۲۳)$$

و یا

$$n\lambda^d \geq \zeta(\frac{d}{2}). \qquad (۲۴)$$

این شرط، شرطی ترکیبی از دما و چگالی است که با توجه به رابطه $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$n(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}})^d \geq \zeta(\frac{d}{2}). \qquad (۲۵)$$

از این رابطه چند درس مهم می گیریم:

■ یک: برای یک گاز دوبعدی بوزونی ($d=2$) چگالش رخ نمی دهد، زیرا $\zeta(1)=\infty$ و شرط چگالش هرگز محقق نمی شود، مگر در دمای صفر مطلق.

■ دو: ناحیه ای که در آن چگالش رخ می دهد در شکل زیر نشان داده شده است. بنابر این به ازای هر چگالی محدود هر وقت که دما را از یک حد بحرانی T_c کمتر کنیم، چگالش اتفاق می افتد و به ازای هر دمای محدود هر گاه چگالی را از یک مقدار بحرانی n_c زیادتر کنیم چگالش آغاز خواهد شد. این دما و این چگالی بحرانی را با استفاده از رابطه چگالش می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} n_c &= \zeta(\frac{d}{2})\left(\frac{\sqrt{2\pi mkT}}{h}\right)^d, \\ T_c &= \frac{h^2}{2\pi mk}\left(\frac{n}{\zeta(\frac{d}{2})}\right)^{\frac{2}{d}}. \end{aligned} \tag{۲۶}$$

■ سه: رابطه ۲۲ نشان می دهد که هر چقدر که جرم ذره کمتر باشد، چگالش زودتر اتفاق می افتد. هم چنین وجود h در این رابطه نشان از این دارد که این پدیده یک پدیده کوانتومی است.

■ **یک نکته:** [۳] اگر به روابط (۱۷) نگاه کنیم، به نظر می رسد که انرژی گاز بوزونی مستقل از تعداد ذرات است و یک مقدار حداکثری و متناهی ای دارد که برابر است با $U_{max}=kT(\frac{d}{2}\frac{V}{\lambda^d})\zeta(\frac{d}{2}+1)$. در نتیجه به نظر می رسد که هر چه تعداد ذرات را اضافه کنیم به انرژی این گاز چیزی اضافه نمی شود که در نگاه اول عجیب و غیرواقعی به نظر می رسد. اما دلیل این امر این است که انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته ایم و به همین دلیل بعد از چگالش هر چه ذره اضافه می کنیم، این ذرات به حالت پایه رفته و انرژی سیستم اضافه نمی شود. می توانیم از همان ابتدا انرژی حالت پایه را برابر با ϵ_0 بگیریم. در این صورت به جای رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$\ln Q=-\ln(1-e^{-\beta\epsilon_0}z)-\frac{V}{\lambda^d}\frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1}\ln(1-ze^{-x})dx. \tag{۲۷}$$

حال اگر همان محاسبات پیشین را ادامه دهیم به جای روابط (۱۷) به روابط زیر می رسیم:

[۳] توضیح این نکته را مرهون سوالی می دانم که علی اکبر ربانی نژاد دانشجوی این درس در بهار سال ۱۴۰۳ پرسیده است . به خاطر این سوال و پی گیری اش از او تشکر می کنم.

$$N = N_0(z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z), \qquad \frac{PV}{kT} = -\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z), \qquad \frac{U}{kT} = \frac{\epsilon_0 N_0(z)}{kT} + \frac{d}{2}\frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z). \tag{۲۸}$$

که در آن

$$N_0(z) := \frac{z}{e^{\beta\epsilon_0} - z}$$

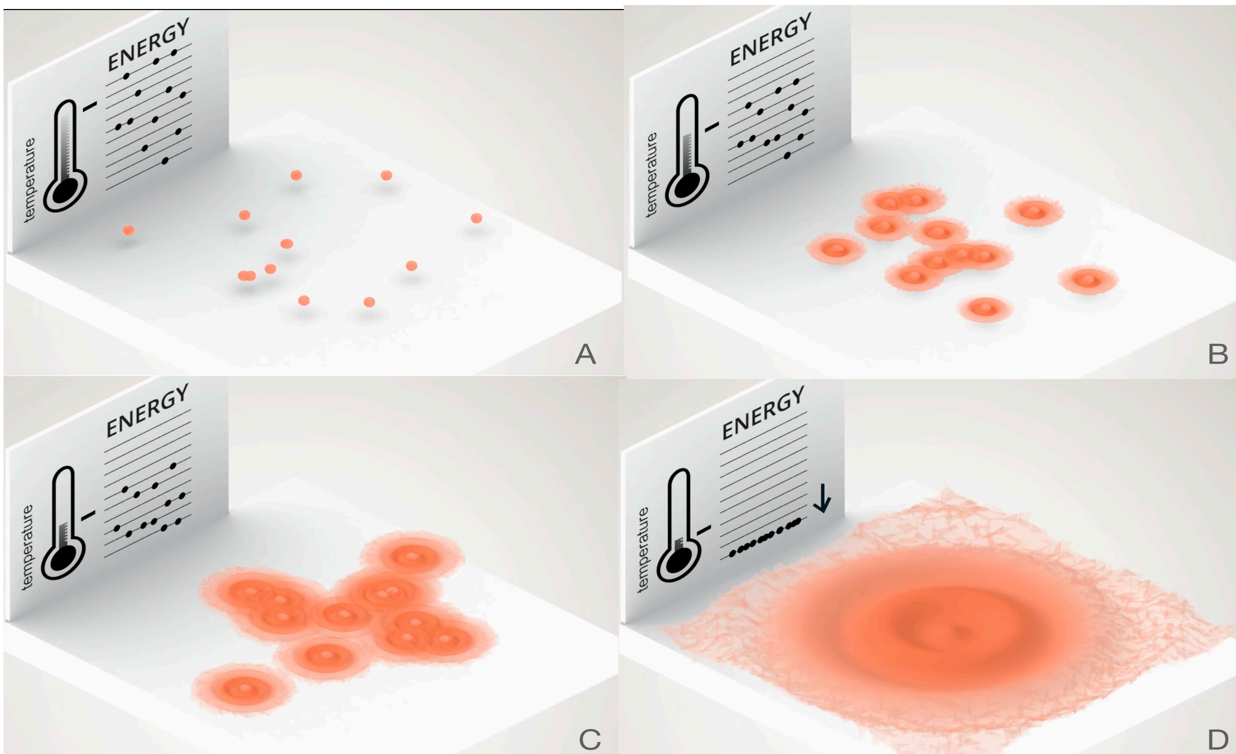
تعداد ذراتی است که در حالت پایه جای گرفته اند. به این ترتیب می بینیم که هر چه z به $e^{\beta\epsilon_0}$ نزدیک تر می شود، تعداد ذرات جایگرفته در حالت پایه یعنی $N_0(z)$ نیز بیشتر شده و انرژی این ذرات یعنی $N_0(z)\epsilon_0$ نیز به صورت نامحدود اضافه خواهد شد.

۲ مشاهده تجربی چگالش بوز-اینشتین

شمایی از چگونگی چگالش بوز-اینشتین در تصویر زیر دیده می شود. در شکل (A) دما بالاست و اتم ها مثل گوی های جدا از هم با سرعت زیاد حرکت می کنند. به تدریج که دما پایین می آید، تابع موج آنها گسترده می شود و سرانجام در شکل (D) وقتی که دما به زیر دمای چگالش می رسد، همه آنها یک تابع موج پیدا می کنند و در واقع در یک حالت کوانتومی قرار می گیرند.

نخستین بار در سال ۱۹۹۵، اریک کرنل [آ] و کارل وایمن [ب] توانستند یک گاز رقیق از حدود ۲۰۰۰ اتم روبیدیم ^{87}Rb را در دمای ۱۷۰ نانوکلوین چگالیده کنند. چهارماه بعد، ولفگانگ که ترل [ج] در یک آزمایش مستقل توانست صد برابر این تعداد اتم سدیم ^{23}Na را در دمای میکروکلوین چگالیده کند.

[آ] Eric Cornell
[ب] Carl Weiman
[ج] Wolfgang Ketterle



شکل ۳: چهار قاب از یک انیمیشن که چگونگی چگالش بوز-اینشتین را نشان می دهد. برگرفته از ویکی پدیا

۳ خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده آل

برای آنکه ترمودینامیک گاز بوزونی را مطالعه کنیم می بایست دو رژیم متفاوت را از هم تمیز دهیم. یکی وقتی که هنوز چگالش رخ نداده است و دیگری وقتی که چگالش رخ داده است.

Eric Cornell Carl Weiman Wolfgang Ketterle

شکل ۴: فیزیکدان هایی که اولین بار چگالش بوز_اینشتین را به طور تجربی مشاهده کردند و برای این کار برنده جایزه نوبل سال ۲۰۰۱ شدند.

۱.۳ بالاتر از دمای چگالش

در این رژیم z هنوز برابر با ۱ نشده است، بنابراین عبارت های $\frac{z}{1-z}$ یا $\ln(1-z)$ را می توان در مقایسه با بقیه جملات دور ریخت و رابطه (۱۷) را به شکل زیر نوشت:

$$n\lambda^d = g_{\frac{d}{2}}(z), \qquad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z), \qquad U = \frac{d}{2}PV. \tag{۲۹}$$

از آنجا که همواره $0 < z < 1$ است می توان $g_n(z)$ را بر حسب توان های z بسط داد.

■ تمرین: نشان دهید که تابع $g_n(z)$ را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}. \tag{۳۰}$$

در این صورت می نویسیم

$$n\lambda^d = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}}}. \tag{۳۱}$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}}}. \tag{۳۲}$$

سری (۳۱) را می توان وارونه کرد که باعث می شود z را بر حسب توان های متوالی $n\lambda^d$ بنویسیم:

$$z = \sum_{l=1}^{\infty} a_l (n\lambda^d)^l. \quad (۳۳)$$

جایگذاری این سری در رابطه (۳۲) بدست می دهد:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l (n\lambda^d)^l \quad (۳۴)$$

و یا

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l (\frac{N}{V}\lambda^d)^l = N \sum_{l=1}^{\infty} b_l (\frac{N}{V}\lambda^d)^{l-1} \quad (۳۵)$$

و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = N\left(1 + b_2(\frac{\lambda^d}{v}) + b_3(\frac{\lambda^d}{v})^2 + \cdots\right), \quad (۳۶)$$

که رابطه آخر بسط ویریال برای معادله حالت را بدست می دهد. برای این کار می بایست رتبه به رتبه ضریب های a_l و سپس b_l را بدست آورد. دقت کنید که اگر $\frac{\lambda^d}{v}$ کوچک باشد به معنای این است که طول موج گرمایی نسبت به فاصله میانگین بین ذرات کوچک است و آثار کوانتومی اهمیت کمی دارند. به همین دلیل در بسط ویریالِ بالا طرف راست بر حسب قوای متوالی این پارامتر یعنی $\frac{\lambda^d}{v}$ نوشته شده است. در حدی که این پارامتر کاملا قابل صرف نظر کردن باشد، معادله حالت به معادله حالت گاز معمولی یعنی گاز ماکسول ـ بولتزمن تبدیل می شود. از رابطه بالا مقدار انرژی را نیز می توانیم بدست آوریم:

$$U = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}NkT\left(1 + b_2(\frac{\lambda^d}{v}) + b_3(\frac{\lambda^d}{v})^2 + \cdots\right). \quad (۳۷)$$

ظرفیت گرمایی ویژه را نیز می توان از رابطه $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$ بدست آورد.

■ مثال: سعی می کنیم ضریب b_2 را برای گاز سه بعدی یعنی برای $d = 3$ بدست بیاوریم. از رابطه (۳۱) داریم:

$$y = n\lambda^3 = z + \frac{z^2}{2\sqrt{2}} + \cdots. \quad (۳۸)$$

بنابراین قرار می دهیم

$$z = y + ay^2 + \cdots.$$

این بسط را در دو طرف رابطه قبلی قرار می دهیم:

$$y = \left(y + ay^2 + \cdots\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(y^2 + \cdots\right) \tag{۳۹}$$

که از آن نتیجه می گیریم: $a = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$. بنابراین

$$z = y - \frac{1}{2\sqrt{2}}y^2 + \cdots . \tag{۴۰}$$

حال این مقدار را در رابطه (۳۱) قرار می دهیم و بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= \frac{V}{\lambda^3}\left(z + \frac{z^2}{2^{\frac{5}{2}}}\right) \\ &= \frac{V}{\lambda^3}\left(y - \frac{y^2}{2\sqrt{2}} + \frac{y^2}{2\sqrt{5}} + \cdots\right) \\ &= \frac{V}{\lambda^3}\left(y - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}})y^2 + \cdots\right). \end{aligned} \tag{۴۱}$$

و یا با توجه به اینکه $y = \frac{\lambda^3}{v}$

$$\frac{PV}{kT} = N\left(1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}})\frac{\lambda^3}{v} + \cdots\right) \tag{۴۲}$$

دیده می شود که فشار گاز کمتر از یک گاز ایده آل معمولی است. این کاهش فشار ناشی از تمایل بوزون ها برای جذب یکدیگر است.

■ تمرین: ظرفیت گرمایی ویژه گاز بوزونی را با استفاده از روابط بالا بدست آورید.

۲.۳ پایین تر از دمای چگالش

چگالش وقتی رخ می دهد که حالت های برانگیخته به اندازه ظرفیت خود ذره بپذیرند. می دانیم که این ظرفیت ماکزیمم برابر است با

$$N_{max} = \frac{V}{\lambda^d}\zeta(\frac{d}{2}). \tag{۴۳}$$

در نتیجه بقیه ذرات حتما به حالت پایه می روند. اگر تعداد کل ذرات را N بگیریم و تعداد ذراتی که به حالت پایه می روند را N_0 بگیریم، آنگاه:

$$N_0 = N - N_{max} = N - \frac{V}{\lambda^d}\zeta(\frac{d}{2}).$$

از آنجا که $N_0 = \frac{z}{1-z}$ می توانیم مقدار z را از این جا حساب کنیم. بنابراین

$$z = \frac{N_0}{N_0 + 1}, \tag{۴۴}$$

که در آن N_0 از رابطه قبلی داده می شود. باید دقت کرد که در جاهایی که حساس نیست و باعث اشتباه اساسی نمی شود، می توان z را مساوی ۱ گرفت. حال می توانیم مقدارz ِ بدست آمده در رابطه بالا را در رابطه (۱۷) قرار دهیم تا معادلات حالت بعد از چگالش معین شوند. داریم:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z). \tag{۴۵}$$

بنابراین با قراردادن (۴۴) در این رابطه بدست می آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln(\frac{1}{N_0+1}) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(\frac{N_0}{N_0+1}), \tag{۴۶}$$

که در آن $N_0 = N - \frac{V}{\lambda^d}\zeta(\frac{d}{2})$. درست در ابتدای چگالش که N_0 مقداری از مرتبه ۱ دارد، نمی توان در عبارت بالا تقریبی به عمل آورد، اما تنها کمی بعد از چگالش، به محض اینکه N_0 از مرتبه 10^2 یا حتی 10^1 می شود، می توان با تقریب خیلی خوب $\frac{N_0}{N_0+1}$ را برابر با ۱ گرفت. در نتیجه رابطه (۴۶) به شکل زیر در می آید:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln N_0 + \frac{V}{\lambda^d}\zeta(\frac{d}{2}+1). \tag{۴۷}$$

حال دقت می کنیم که جمله دوم یک عبارت فزونور و متناسب با N است، بنابراین می توان از جمله اول یعنی $\ln N_0$ نسبت به جمله دوم صرف نظر کرد.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P = kT\frac{1}{\lambda^d}\zeta(\frac{d}{2}+1) \tag{۴۸}$$

و یا

$$P = cT^{1+\frac{d}{2}}, \tag{۴۹}$$

که در آن c یک ثابت است.

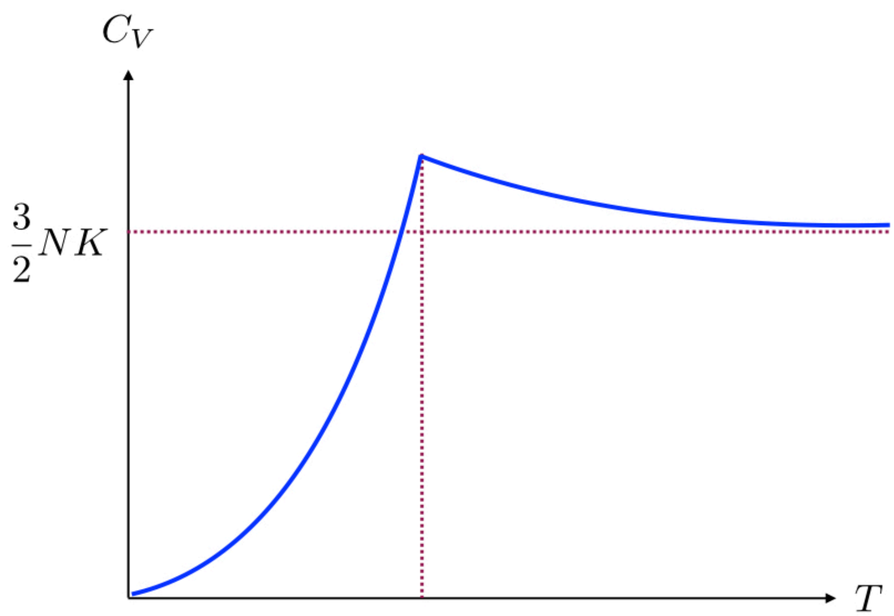
این رابطه نشان می دهد که بعد از چگالش فشار مستقل از حجم شده است و در نتیجه تراکم پذیری گاز برابر با صفر شده است، درست مثل اینکه گاز تبدیل به مایع شده باشد. هم چنین از رابطه ی $U = \frac{d}{2}PV$ بدست می آوریم:

$$U = \frac{d}{2}cVT^{1+\frac{d}{2}}. \tag{۵۰}$$

از این رابطه ظرفیت گرمایی ویژه به شکل زیر بدست می آید:

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T}_v = \frac{d}{2}(1 + \frac{d}{2})cVT^{\frac{d}{2}}. \tag{۵۱}$$

هرگاه این رابطه را با نتایجی که از حل تمرین مربوط به ظرفیت گرمایی ویژه قبل از چگالش بدست آوردید، ترکیب کنیم و ظرفیت گرمایی ویژه را بر حسب دما رسم کنیم منحنی کامل ظرفیت گرمایی ویژه بدست می آید، شکل (۵). بقیه خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده آل را می توان به



شکل ۵: ظرفیت گرمایی گاز بوزونی سه بعدی بر حسب دما.

همین صورت بدست آورد.

۴ مسئله ها

■ **مسئله اول:** یک ذره اسپین یک دوم در میدان مغناطیسی $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{n}}$ قرار دارد. هامیلتونی برهم کنش این ذره برابر است با:

$$H = -\gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \tag{۵۲}$$

ذره در دمای T به تعادل رسیده است.

الف_ ماتریس چگالی این ذره را تعیین کنید.

ب_ تابع پارش ذره را بدست آورید.

پ_ متوسط انرژی ذره و هم چنین انتروپی آن را مشخص کنید.

■ **مسئله دوم:** برای یک گاز بوزونی ایده آل نشان دهید که:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial T}_P = -\frac{5}{2T}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}. \tag{۵۳}$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که:

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\partial z/\partial T)_P}{(\partial z/\partial T)_v} = \frac{5}{3}\frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{(g_{3/2}(z))^2} \tag{۵۴}$$

■ **مسئله سوم:** نشان دهید که ضریب تراکم پذیری همدما و ضریب تراکم پذیری بی در رو برای یک گاز ایده آل بوزونی توسط روابط زیر داده می شوند:

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT}\frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \qquad \kappa_S = \frac{3}{5nkT}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{5/2}(z)}, \tag{۵۵}$$

که در آن $n = \frac{N}{V}$ چگالی گاز است. نشان دهید که وقتی $z \longrightarrow 0$ κ_T و κ_S به سمت مقادیر مربوط به گاز کلاسیک میل می کنند یعنی

$$\kappa_T \longrightarrow \frac{1}{P} \qquad \kappa_S \longrightarrow \frac{1}{\gamma P}.$$

رفتار این کمیت ها را در حدی که گاز خیلی واگن است یعنی حد $z \longrightarrow 1$ بدست آورید.

■ **مسئله چهارم:** سرعت صوت در یک مایع از رابطه زیر حساب می شود:

$$v^2 = (\frac{\partial P}{\partial \rho})_S, \tag{۵۶}$$

که در آن ρ چگالی جرمی گاز است. نشان دهید که سرعت صوت در یک گاز بوزونی برابر است با:

$$v^2 = \frac{5kT}{3m}\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} = \frac{5}{9}\langle u^2\rangle. \tag{۵۷}$$

■ **مسئله پنجم:** یک گاز بوزونی را درآنزامبل گراندکانونیک در نظر بگیرید. افت و خیز تعداد کل ذرات و هم چنین انرژی کل را حساب کنید. این کار را هم در شرایط معمول و هم در شرایطی که گاز به شدت واگن می شود انجام دهید.

■ **قدردانی:** از آقای آرمین یداللهی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که با دقت استثنایی تمامی اشکالات متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می کنم.
